2. kapitola – Kvadratické nerovnice

Při řešení kvadratické nerovnice postupujeme nejprve, jako bychom řešili kvadratickou rovnici. Nalezneme-li kořeny, zobrazíme si kvadratický trojčlen do soustavy kolmých os x a y jako parabolu, která prochází osou x právě v bodech odpovídajících kořenům.

Kvadratickou rovnici si upravme tak, aby před kvadratickým členem bylo kladné číslo. Potom je parabola otevřená do kladného ypsilonového nekonečna.

V případě, že kvadratický trojčlen je menší než nula, zajímá nás údolí pod osou x a kořeny jsou všechny x-ové hodnoty této oblasti odpovídající.

Je-li kvadratický trojčlen větší než nula, zaměříme se na větve nad osou x a kořeny jsou všechny x-ové hodnoty těmto oblastem odpovídající.

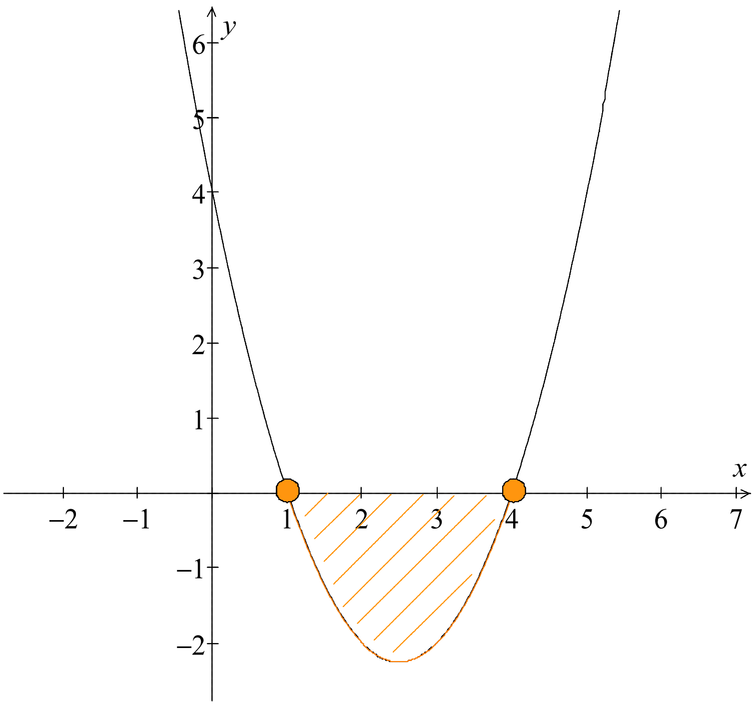
Rovnost kvadratického trojčlenu s nulou splňují průsečíky paraboly a osy x.

1. Vypočítej kvadratickou nerovnici $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

Pro případ rovnosti platí:

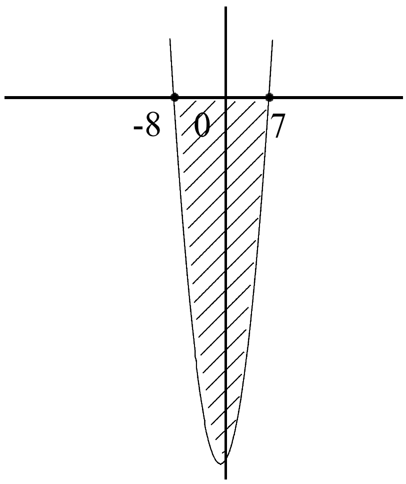
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$



$x \in \langle 1, 4 \rangle$

2. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $x^2+x-56\leq 0$?

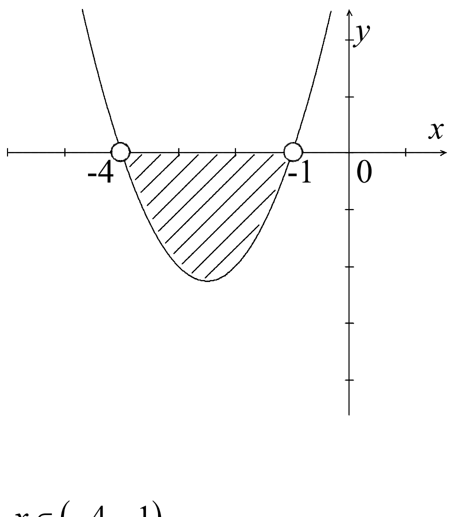
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+224}}{2}=\frac{-1\pm 15}{2}=\begin{matrix}\nearrow -8\\ \searrow 7\end{matrix}$$



$\underline{\underline{x\in\langle -8,7\rangle}}$

3. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $x^2+5x+4<0$?

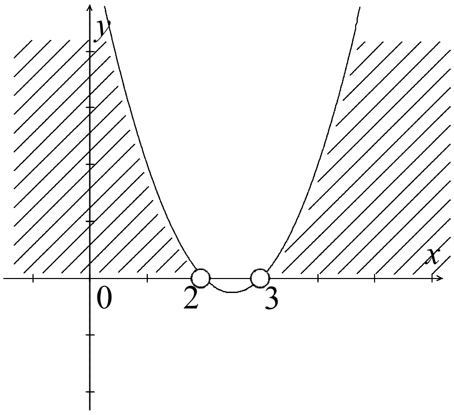
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{2}\begin{matrix}\nearrow -4\\ \searrow -1\end{matrix}$$



$\underline{\underline{x\in(-4,-1)}}$

4. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $x^2 - 5x + 6 > 0$?

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$



$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)}}$$

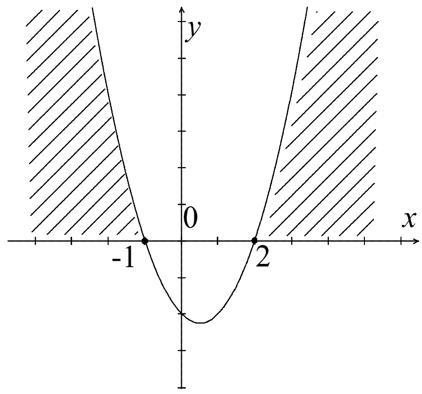
5. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $-x^2 + x + 2 < 0$?

$$-x^2 + x + 2 < 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}}$$

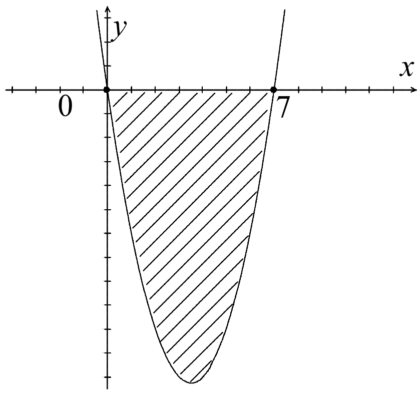


Pozor, při násobení nebo dělení nerovnice záporným číslem se otáčí znaménko nerovnosti.

6. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $x^2 - 7x \le 0$?

$$x^2 - 7x \le 0$$
$$x(x-7) \le 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 7$$

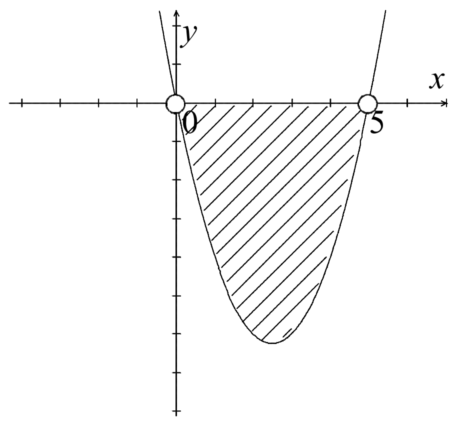
$$\underline{\underline{x \in \langle 0, 7 \rangle}}$$



7. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $5x - x^2 > 0$?

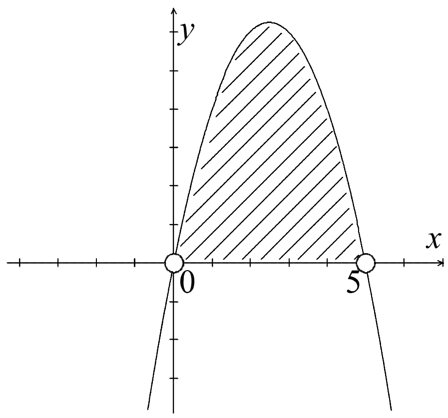
$$5x - x^2 > 0 \quad /\cdot(-1)$$
$$x^2 - 5x < 0$$
$$x(x-5) < 0 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 5$$

$$\underline{\underline{x \in (0, 5)}}$$



Jiná metoda:

$$x(5-x) > 0$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 5$$



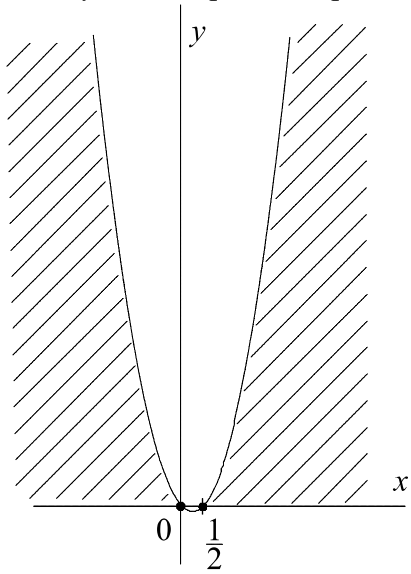
		0		5	
x	$-$		$+$		$+$
$5-x$	$+$		$+$		$-$
	$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$

$$\underline{\underline{x \in (0, 5)}}$$

8. Jaké množině je rovna množina všech reálných čísel, pro která platí $2x^2 - x > 0$?

$$2x^2 - x > 0$$
$$x(2x-1) > 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}}$$



Teorie:

Vyjde-li diskriminant kladně, jsou dva kořeny a řešení vypadá, jak pozorujeme na ukázkových úlohách.

Vyjde-li diskriminant nula, znamená to, že parabola sedí svým „dnem" na ose *x*.

Vyjde-li diskriminant záporně, vznáší se celá parabola nad osou *x*.

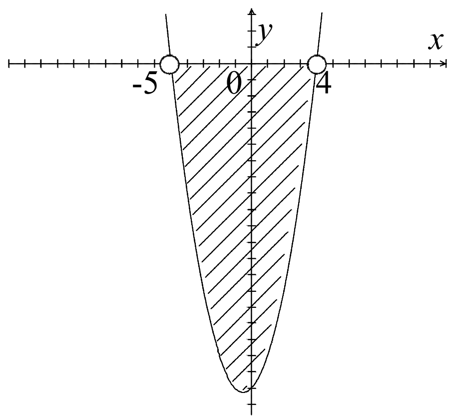
9. Pro jakou množinu všech reálných čísel platí $\frac{x^2 + x - 20}{5x^2 + 1} < 0$?

Jmenovatel je evidentně kladný $\Rightarrow$ čitatel musí být záporný

$$x^2 + x - 20 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \begin{matrix} \nearrow -5 \\ \searrow 4 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{x \in (-5, 4)}}$$



10. Je dána funkce $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5}{6x-3}-1$. Pro jaká x nabývá funkce nezáporných hodnot?

Podm.: $x\neq\dfrac{1}{2}$

$$\frac{x^2+5}{6x-3}-1\geq 0$$

$$\frac{x^2+5-6x+3}{6x-3}\geq 0 \qquad\qquad x^2-6x+8=0 \qquad x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{2}=\begin{cases}\nearrow 2\\ \searrow 4\end{cases}$$

$$\frac{x^2-6x+8}{6x-3}\geq 0 \qquad\qquad 6x-3=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$		2		4	
x^2-6x+8	$+$		$+$		$-$		$+$
$6x-3$	$-$		$+$		$+$		$+$
	$\ominus$		$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$

$$\underline{\underline{x\in\left(\frac{1}{2},2\right\rangle\cup\left\langle 4,+\infty\right)}}$$